Prueba 3

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

---

1) [**15 ptos.**] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que

$$T((1,1,0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T((0,0,1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T((0,-1,1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) (**10 ptos.**) Determinar $\mathrm{Nul}(T)$ y $\mathrm{Rg}(T)$. **Justifique**.

b) (**5 ptos.**) ¿T es inyectiva?. **Justifique**.

2) **[20 ptos.]** Sea $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ la transformación dada por la matriz

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 3m+2 & m+1 \\ m & 2 \end{pmatrix}$$

donde $B = \{1, x\}$ y $C = \{(1,0),(0,1)\}$ son las bases canónicas **ordenadas** de $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, y m es un parámetro.

a) (**10 ptos.**) Para $m = -1$, muestre que T es un isomorfismo y determine $T^{-1}((a,b))$.

b) (**10 ptos.**) Para $m = 0$, muestre que T **NO** es diagonalizable. Justifique.

3) [**25 ptos.**] Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -9 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (**10 ptos.**) Muestre que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$ y determine los valores propios de A .

b) (**10 ptos.**) Determinar una base para los espacios propios de A.

c) (**5 ptos.**) ¿Es A diagonalizable?. Si lo es, encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP = D$, con D una matriz diagonal.

PAUTA

1) a) Dado que $\{(1,1,0),(0,0,1),(0,-1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, tenemos que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

genera a $\mathrm{Im}(T)$ (2 pts.) . Además, no es difícil ver que B es L.I., por ende B es una base de $\mathrm{Im}(T)$ (2 pts.) y entonces $\mathrm{Rg}(T) = 3$ (1 pts.). Por el teorema de la dimensión tenemos que

$$\mathrm{Nul}(T) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{Rg}(T) = 3 - 3 = 0 \qquad \text{(5 pts.)}$$

b) En el item anterior concluimos que $\mathrm{Nul}(T) = 0$, lo cual implica que T es inyectiva (5 pts.).

2) a) Para $m = -1$ nos queda la matriz

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, T es isomorfismo pues $\det([T]_B^C) = -2 \neq 0$ (3 pts.). Además, tenemos que

$$\begin{array}{rclcrcl} T(1) & = & (-1,-1) & \Leftrightarrow & T^{-1}((-1,-1)) & = & 1 \\ T(x) & = & (0,2) & \Leftrightarrow & T^{-1}((0,2)) & = & x \end{array} \qquad \text{(2 pts.)}$$

Ahora, note que $(a,b) = -a(-1,-1) + \left(\dfrac{b-a}{2}\right)(0,2)$ (2 pts.). Aplicando T^{-1} en lo anterior, y reemplazando las imágenes calculadas anteriormente, nos queda

$$T^{-1}((a,b)) = -a + \left(\frac{b-a}{2}\right)x \qquad \text{(3 pts.)}$$

b) Para $m = 0$ nos queda la matriz

$$A := [T]_B^C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que $P_A(\lambda) = (2-\lambda)^2$ (3 pts.) y además $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ (4 pts.). Luego, como

$$m.a.(2) = 2 \neq 1 = m.g.(2)$$

concluimos que A no es diagonalizable (3 pts.).

3) Tenemos que

- $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(1-\lambda)^2$ (8 pts.) y los valores propios son 1 y 0 (2 pts.).
- Una base de V_1 es $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (5 pts.).
- Una base de V_0 es $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (5 pts.).
- A es diagonalizable pues $m.a.(1) = 2 = m.g.(1)$ y $m.a.(0) = 1 = m.g.(0)$ (1 pts.).
- Considerando $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2 pts.) y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2 pts.), se tiene que $P^{-1}AP = D$.